CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
"GRIGORE MOISIL" - EDIȚIA a XXXV-a
BISTRIȚA, 24-26 MARTIE 2023

Barem - Clasa a X-a

1. *Fie $ABCD$ un paralelogram. Pe laturile AB şi BC se construiesc triunghiurile echilaterale ABE şi BCF, primul spre interior iar al doilea spre exterior. Să se arate că dacă punctele D, E, F sunt coliniare, atunci paralelogramul $ABCD$ este romb.*

Petru Braica

Barem. Considerăm originea planului complex în punctul D. Fie a, c afixele punctelor A, respectiv C. Afixul lui B este $a+c$ ... **1p**

iar afixele punctelor E şi F sunt $a+c\varepsilon$, respectiv $c+a\varepsilon$, unde $\varepsilon^3=1$, $\varepsilon\neq 1$.
... **2p**

D, E, F coliniare $\Leftrightarrow \frac{a+c\varepsilon}{c+a\varepsilon}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a+c\varepsilon}{c+a\varepsilon}=\frac{\overline{a}+\overline{c}\overline{\varepsilon}}{\overline{c}+\overline{a}\overline{\varepsilon}} \Leftrightarrow (\overline{\varepsilon}-\varepsilon)(|a|^2-|c|^2)=0$.
... **3p**

Cum $\overline{\varepsilon}\neq\varepsilon$ avem $|a|=|c| \Leftrightarrow DA=DC$, adică $ABCD$ este romb. ... **1p**

□

2. *Să se determine toate funcţiile monotone $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care*

$$f(f(x))+f(f(y))=f(x+y)f(xy)$$

pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

Bogdan Blaga

Barem. Fie $f(0)=c$, atunci pentru $x=y=0$ avem că $f(c)=\frac{c^2}{2}$ şi pentru $y=0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ găsim $f(f(x))=cf(x)-\frac{c^2}{2}$ (1). ... **1p**

Cu (1) ecuaţia dată devine

$$c(f(x)+f(y))=c^2+f(x+y)\cdot f(x\cdot y) \quad (2)$$

$\dots$ **1p**

Pentru $x = 1$, $y = -1$ din (2) găsim că $cf(1) + cf(-1) = c^2 + cf(-1)$, de unde aflăm $cf(1) = c^2$ $\dots$ **1p**

I. Dacă $c \neq 0$, atunci $f(1) = c$ şi cu $y = 1$ în (2) obţinem $cf(x) = f(x) \cdot f(x+1)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, egalitate care dacă $f(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ ne conduce la $f(x) = 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, care este soluţie a ecuaţiei.

$\dots$ **1p**

Dacă există $x_0 \in \mathbb{R}$ cu $f(x_0) = 0$, atunci $cf(x_0 - 1) = cf(x_0 - 1)f(x_0) = 0$, so $f(x_0 - 1) = 0$. Cum f este monotonică, se obţine că $f(x) = 0$ oricare ar fi $x \in [x_0 - 1, x_0]$. Inductiv, se obţine că $f(x) = 0$, oricare ar fi $x \leq x_0$. Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, în relaţia (2) alegem $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $y \leq \min(x_0, x_0 - x)$ pentru a obţine $cf(x) = c^2$, ce implică $f(x) = c$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, o contradicţie.

$\dots$ **1p**

II. Dacă $c = 0$, relaţiile (1) şi (2) ne conduc la $f(f(x)) = 0$ şi $f(x+y)f(xy) = 0$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Dacă $z \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$ există $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x + y = xy = z$, de unde $f^2(z) = f(z)f(z) = f(x+y)f(xy) = 0$ şi atunci $f(z) = 0$ şi în concluzie f este funcţia nulă.

$\dots$ **2p**

$\square$

3. *(a) Fie* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *şi* $\omega = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. *Să se arate că*

$$\sum_{k=1}^{n} |z_1 + z_2\omega^{2k}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_1 + z_2\omega^{2k-1}|^2.$$

(b) Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ *şi* $A_1A_2\dots A_{2n}, B_1B_2\dots B_{2n}$ *poligoane regulate la fel orientate. Să se arate că*

$$\sum_{k=1}^{n} A_{2k-1}B_{2k-1}^2 = \sum_{k=1}^{n} A_{2k}B_{2k}^2.$$

Dan-Ştefan Marinescu

Barem. (a) Cum $z \cdot \overline{z} = |z|^2, \forall z \in \mathbb{C}$ avem

$$\sum_{k=1}^{n} |z_1 + z_2 \cdot \omega^{2k}|^2 = n|z_1|^2 + \overline{z_1}z_2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \omega^{2k} + z_1 \cdot \overline{z_2} \sum_{k=1}^{n} \overline{\omega}^{2k} + n|z_2|^2 =$$

$$= n(|z_1|^2 + |z_2|^2) + \overline{z_1}z_2 \cdot \frac{1 - \omega^{2n}}{1 - \omega^2} + z_1 \cdot \overline{z_2} \cdot \frac{1 - \overline{\omega}^{2n}}{1 - \overline{\omega}^2} = n(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

$\dots$ **2p**

Prin acelaşi procedeu găsim că şi membrul drept este $n(|z_1|^2+|z_2|^2)$, de unde deducem egalitatea de la (a)

... **1p**

(b) Admitem că poligoanele sunt la fel orientate. Fie a afixul centrului cercului circumscris poligonului $A_1A_2\dots A_{2n}$, şi b afixul centrului cercului circumscris poligonului $B_1B_2\dots B_{2n}$. De asemenea, notăm cu $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$, $b_1, b_2, \dots, b_{2n}$ afixele punctelor $A_1, A_2, \dots A_{2n}$, respectiv $B_1, B_2, \dots, B_{2n}$.

... **1p**

Pentru $k \in \{2, 3, \dots, 2n\}$ avem $a_k = a + (a_1 - a)\omega^{k-1}$, $b_k = b + (b_1 - b)\omega^{k-1}$

... **1p**

$A_kB_k = |a - b + (a_1 - a - b_1 + b)\omega^{k-1}|$, oricare ar fi $k \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ ... **1p**

şi din (a) se deduce egalitatea de la (b). ... **1p**

□

4. *Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuatia $2^{(x)} = (2^x)$, unde prin (x) am notat numarul intreg k ce verifică $k - \frac{1}{2} \le x < k + \frac{1}{2}$. Numărul (x) se numeşte cel mai apropiat întreg de x.*

Ovidiu Pop

Barem. $(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right]$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, unde $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ este funcţia parte întreagă.

Dacă $(x) < -1$, atunci $x < -\frac{1}{2}$ deci $2^{(x)} \notin \mathbb{Z}$. Aşadar pe acest interval ecuaţia nu are soluţii. ... **1p**

Dacă $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(x) = 0$ şi ecuaţia devine $1 = \left[2^x + \frac{1}{2}\right]$, care este verificată de orice $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ... **2p**

Pe orice interval de forma $\left[\frac{2k-1}{2}, \frac{2k+1}{2}\right)$, $k \in \mathbb{N}^*$, ecuaţia devine

$$2^k = \left[2^x + \frac{1}{2}\right] \text{ şi orice } x \in \left[\log_2\left(2^k - \frac{1}{2}\right), \log_2\left(2^k + \frac{1}{2}\right)\right)$$

este soluţie ... **3p**

În concluzie, mulţimea soluţiilor este

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left\{\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \left[\log_2\left(2^k - \frac{1}{2}\right), \log_2\left(2^k + \frac{1}{2}\right)\right)\right\}.$$

... **1p**

□