**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ**
**"GRIGORE MOISIL" - EDIȚIA a XXXV-a**
**BISTRIȚA, 24-26 MARTIE 2023**

# Clasa a X-a

1. Fie $ABCD$ un paralelogram. Pe laturile $AB$ şi $BC$ se construiesc triunghiurile echilaterale $ABE$ şi $BCF$, primul spre interiorul paralelogramului iar al doilea spre exterior. Să se arate că dacă punctele $D, E, F$ sunt coliniare, atunci paralelogramul $ABCD$ este romb.

2. Să se determine toate funcţiile monotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care
$$f(f(x)) + f(f(y)) = f(x + y)f(xy)$$
oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

3. (a) Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ şi $\omega = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Să se arate că
$$\sum_{k=1}^{n} |z_1 + z_2\omega^{2k}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_1 + z_2\omega^{2k-1}|^2.$$

   (b) Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi $A_1A_2 \ldots A_{2n}, B_1B_2 \ldots B_{2n}$ poligoane regulate la fel orientate. Să se arate că
$$\sum_{k=1}^{n} A_{2k-1}B_{2k-1}^2 = \sum_{k=1}^{n} A_{2k}B_{2k}^2.$$

4. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{(x)} = (2^x)$, unde prin $(x)$ am notat numărul întreg $k$ ce verifică $k - \frac{1}{2} \leq x < k + \frac{1}{2}$. Numărul $(x)$ se numeşte cel mai apropiat întreg de $x$.

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timp de lucru: *3 ore.*