CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
"GRIGORE MOISIL" - EDIȚIA a XXXV-a
BISTRIȚA, 24-26 MARTIE 2023

Barem - Clasa a XI-a

1. *Fie $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încat $A^2+B^2+C^2 = AB+BC+CA$. Demonstraţi că $\det(AB + BC + CA - BA - CB - AC) = 0$ sau $3|n$.*

Mihai Opincariu, Brad

Barem. Fie $\varepsilon \in \mathbb{C}$ astfel încât $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon \neq 1$, atunci $\overline{\varepsilon} = \varepsilon^2$ şi $1 + \overline{\varepsilon} = -\varepsilon$. Aşadar

$$(A + \varepsilon B + \overline{\varepsilon} C)(A + \overline{\varepsilon} B + \varepsilon C) = -\varepsilon(AB + BC + CA - BA - CB - AC)$$

... **2p**

şi $(A + \overline{\varepsilon} B + \varepsilon C)(A + \varepsilon B + \overline{\varepsilon} C) = -\overline{\varepsilon}(AB + BC + CA - BA - CB - AC)$

... **2p**

Prin trecere la determinant în cele două egalităţi obţinem

$$(-\varepsilon)^n \det(AB + BC + CA - BA - CB - AC) =$$
$$= (-\overline{\varepsilon})^n \det(AB + BC + CA - BA - CB - AC)$$

... **2p**

şi de aici rezultă concluzia. ... **1p**

$\square$

2. *Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ cu $b, d > 0$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie surjectivă, derivabilă cu f' continuă şi $f' \geq 0$. În plus, f are proprietatea proprietatea că*

$$a\cos(bf(x)) = c\cos(df(x)) \quad (1)$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $a = c$ şi $b = d$.

Bogdan Blaga

Barem. Dacă $|a| > |c|$, din surjectivitatea lui f exsită $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_0) = 0$ şi atunci $|a| = |c||\cos(df(x_0))| \leq c$, la fel dacă $|a| < |c|$ se ajunge la o contradicţie. În consecinţă $|a| = |c|$. ... **2p**

Prin derivare găsim că

$$abf'(x)\sin(bf(x)) = cdf'(x)\sin(df(x)),\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

... **1p**

Cum f' nu poate fi funcţia nulă, există $u, v \in \mathbb{R}$, cu $u < v$ şi $f'(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (u, v)$, atunci (1) devine

$$ab\sin(bf(x)) = cd\sin(df(x)), \forall x \in (u, v)$$

care prin derivare conduce la

$$ab^2\cos(bf(x)) = cd^2\cos(df(x)), \forall x \in (u, v)$$

... **2p**

Dacă $\cos(bf(x)) = 0$, $\forall x \in (u, v)$, atunci derivând se obţine prin derivare $\sin(bf(x)) = 0$, $\forall x \in (u, v)$, ceea ce nu e posibil (deoarece $\cos^2(bf(x)) + \sin^2(bf(x)) = 1$). Atunci $b^2a\cos(bf(x)) = d^2c\cos(df(x))$, de unde rezultă $b^2 = d^2$ şi apoi $b = d$. Mai mult, dacă $a = -c$ găsim $b^2 + d^2 = 0$, o contradicţie.

... **2p**

$\square$

3. *Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2 = B^2$. Dacă n este impar, să se arate că*

   a) $\det(AB - BA) = 0$;

   b) $\det(A + B) = 0$ *sau* $\det(A - B) = 0$;

   c) $\det[(AB)^k - (BA)^k] = 0$, *oricare ar fi* $k \in \mathbb{N}^*$.

Ovidiu Pop

Barem. a) $0 \leq \det(A-B)^2 \cdot (A+B)^2 = \det(A-B)(A+B) \cdot \det(A+B)(A-B)$ $= \det(AB - BA)(BA - AB) = (-1)^n \left[\det(AB - BA)\right]^2$ de unde concluzia.

... **2p**

b) Din $(A - B)(A + B) = AB - BA$ prin trecere la determinant găsim că $\det(A - B) \cdot \det(A + B) = \det(AB - BA)$ şi apoi din a) rezultă concluzia.

... **2p**

c) $(AB) \cdot (BA) = A^4$, $(BA) \cdot (AB) = B^4 = A^4$ şi atunci $(AB) \cdot (BA) = (BA) \cdot (AB)$

... **1p**

Cu egalitatea de mai sus avem

$$(AB)^k - (BA)^k = (AB - BA) \cdot \left[(AB)^{k-1} + \ldots + (BA)^{k-1} \right],$$

de unde rezultă concluzia ... **2p**

$\square$

4. *Se consideră şirul* $(x_n)_{n\geq 2}$ *definit prin*

$$x_n = \frac{\sqrt[n]{e} - 1}{\sqrt[n^2]{e} - 1} - n.$$

a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - \frac{1}{2})$.

Dorin Andrica şi Dan-Ştefan Marinescu

Barem. Limita se obţine din

$$\lim_{t\to 0} \frac{t(e^t - 1) - e^{t^2} + 1}{t(e^{t^2} - 1)} = \frac{1}{2}$$

... **1p**

La acest rezultat se ajunge cu ajutorul limitei remarcabile $\lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{t^2}-1}{t^2} = 1$ şi aplicând regula lui L'Hospital. ... **1p**

b) Vom calcula

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{2t} \left[\frac{2te^t - 2t - 2e^{t^2} + 2 - te^{t^2} + t}{t(e^{t^2} - 1)} \right] =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{2te^t - 2t - 2e^{t^2} + 2 - te^{t^2} + t}{t^4}$$

... **2p**

Pentru ultima limită vom face apel, în mod repetat la regula lui L'Hospital. Se obţine că

$$\lim_{t\to 0} \frac{2te^t - 2t - 2e^{t^2} + 2 - te^{t^2} + t}{t^4} = -\frac{2}{3}$$

... **2p**

În consecinţă $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(x_n - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}$. ... **1p**

$\square$