CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
"GRIGORE MOISIL" - EDIȚIA a XXXV-a
BISTRIȚA, 24-26 MARTIE 2023

Clasa a XI-a

1. Fie $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încat $A^2+B^2+C^2 = AB+BC+CA$. Demonstraţi că $\det(AB + BC + CA - BA - CB - AC) = 0$ sau $3|n$.

2. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ cu $b, d > 0$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie surjectivă, derivabilă cu f' continuă şi $f' \geq 0$. În plus, f are proprietatea proprietatea că

$$a\cos(bf(x)) = c\cos(df(x)) \quad (1)$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $a = c$ şi $b = d$.

3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2 = B^2$. Dacă n este impar, să se arate că

   a) $\det(AB - BA) = 0$;

   b) $\det(A + B) = 0$ sau $\det(A - B) = 0$;

   c) $\det[(AB)^k - (BA)^k] = 0$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$.

4. Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 2}$ definit prin

$$x_n = \frac{\sqrt[n]{e} - 1}{\sqrt[n^2]{e} - 1} - n.$$

   a) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

   b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - \frac{1}{2})$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timp de lucru: *3 ore.*