CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
"GRIGORE MOISIL" - EDIȚIA a XXXV-a
BISTRIȚA, 24-26 MARTIE 2023

Barem - Clasa a XII-a

1. *Să se calculeze* $\int\limits_0^{2023} \{\sqrt{x}\}dx$*, unde am notat cu* $\{a\}$ *partea zecimală a numărului real* a*.*

Dorin Andrica

Barem. $\{a\} = a - [a]$, $\forall a \in \mathbb{R}$ şi $[\sqrt{a}] = k$, $k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \in [k^2, (k+1)^2)$

... **1p**

Atunci $\int\limits_{k^2}^{(k+1)^2} [\sqrt{x}]dx = \int\limits_{k^2}^{(k+1)^2} kdx = k(2k+1)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ ... **1p**

$$\int_0^{2023} \{\sqrt{x}\}dx = \int\limits_0^{2023} (\sqrt{x} - [\sqrt{x}])dx = \frac{2}{3}2023^{\frac{3}{2}} - \int_0^{2023} [\sqrt{x}]dx$$

... **1p**

$$\int_0^{2023} [\sqrt{x}]dx = \int_0^{2025} [\sqrt{x}]dx - \int_{2023}^{2025} [\sqrt{x}]dx = \sum_{k=0}^{44} k(2k+1) - 88$$

... **3p**

de unde $\int_0^{2023}\{\sqrt{x}\}dx = \frac{2\cdot 2023}{3}\sqrt{2023} - 59642$.

... **1p**

□

2. *Fie* G *un grup cu* $n \geq 2$ *elemente. Arătaţi că dacă* $f : G \to G$ *e o funcţie cu proprietatea că* $f(xy) = f(x)f(y)$ *pentru cel puţin* $n^2 - 1$ *perechi* $(x, y) \in G \times G$*, atunci* f *este morfism.*

Bogdan Blaga

Barem. Justificare pentru $f(e) = e$ . . . **1p**

Justificare pentru $f(x)f(x^{-1}) = e$ oricare ar fi $x \in G$. . . . **2p**

Dacă f nu este morfism, atunci există o pereche unică $(a, b) \in G \times G$ cu $f(a \cdot b) \neq f(a)f(b)$ şi din cele de mai sus $a, b \neq e$ şi $a \neq b^{-1}$.

Dacă $x \notin \{e, b, a^{-1}\}$ avem

$$f(ab) = f(axx^{-1}b) = f(ax)f(x^{-1}b) = f(a)f(x)f(x^{-1})f(b) = f(a)f(b).$$

. . . **3p**

Alegerea lui x s-a făcut în cazul în care $n > 3$. Cazul $n = 3$ se analizează separat. . . . **1p**

□

3. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ funcţii continue cu proprietatea că*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d g(x)dx.$$

Să se arate că există cel puţin un punct $\xi \in (a, b)$ astfel încat

$$(b-a)f(\xi) = (d-c)g\left(\frac{d-c}{b-a}\xi + \frac{bc-ad}{b-a}\right).$$

Dorel I. Duca

Barem. Cu schimbarea de variabilă $x = \frac{d-c}{b-a}t + \frac{bc-ad}{b-a}$, avem $dx = \frac{d-c}{b-a}dt$ şi dacă $x = c$, avem $t = a$, iar dacă $x = d$ rezultă $t = b$, de unde

$$\int_c^d g(x)dx = \frac{d-c}{b-a}\int_a^b g\left(\frac{d-c}{b-a}t + \frac{bc-ad}{b-a}\right)dt$$

. . . **2p**

iar egalitatea din enunţ devine

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g\left(\frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-ad}{b-a}\right)dx$$

. . . **1p**

Cum dacă $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue cu $\int_a^b u(x)dx = \int_a^b v(x)dx$, atunci există $\xi \in (a, b)$ astfel încât $u(\xi) = v(\xi)$, obţinem concluzia. Ultima afirmaţe se poate justifica astfel: este o consecinţă a teoremei lui Rolle, o formă a teoremei de medie sau se poate demonstra prin reducere la absurd.

. . . **4p**

□

4. *Fie* $(A, +, \cdot)$ *un inel cu unitate şi cu proprietatea că dacă* $x \in A$ *şi* $x^2 = 0$*, atunci* $x = 0$*. Dacă* $M = \{a \in A | a^3 = a\}$*, să se demonstreze că:*

(i) dacă $x, y \in A$ *şi* $xy = 0$*, atunci şi* $yx = 0$*;*

(ii) dacă $a \in M$*, atunci* $a^2 \in Z(A)$*;*

(iii) $2a \in Z(A)$*,* $\forall a \in M$*.*

Mihai Opincariu

Barem. (i) Observăm că $(yx)^2 = yxyx = y(xy)x = y \cdot 0 \cdot x = 0$, deci folosind proprietatea din ipoteză deducem că $yx = 0$.

... **2p**

(ii) Pentru aceasta, să observăm că $\forall x \in A$

$$(xa - a^2xa)^2 = xaxa - xaa^2xa - a^2xaxa + a^2xaa^2xa = 0,$$

şi folosind proprietatea din enunţ deducem $xa = a^2xa$. Înmulţind ultima relaţie la dreapta cu a, observăm că $xa^2 = a^2xa^2$. Similar, observăm că $\forall x \in A$ avem

$$(ax - axa^2)^2 = axax - axaxa^2 - axa^2ax + axa^2axa^2 = 0,$$

ce implică $ax = axa^2$, de unde prin înmulţire la stânga cu a obţinem $a^2x = a^2xa^2$. Cum $x \in A$ este arbitrar, avem $a^2 \in Z(A)$.

... **2p**

Alternativ (ii) se poate astfel: demonstram că dacă $y \in A$ *are proprietatea că dacă* $y^2 = y$*, atunci* $y \in Z(A)$ *şi apoi substituim* $y = a^2$*, unde* $a \in A$*. Se acordă punctajul pentru orice soluţie corectă.*

(iii) Fie $x \in A$ şi $a \in M$ arbitrare. Avem că $(a+1)(a-1)ax = 0$. Folosind concluzia de la (i) deducem că $(a-1)ax(a+1) = 0$, deci $a^2xa + a^2x = axa + ax$.

Folosind acum faptul că $a^2 \in Z(A)$ se deduce că $xa - ax = axa - a^2x$ (1)

... **2p**

În mod analog, $(a-1)(a+1)ax = 0$, şi folosind (i) avem $(a+1)ax(a-1) = 0$. Folosind (ii), ultima este echivalentă cu $xa - ax = a^2x - axa$ (2).

Concluzia se obţine adunând relaţiile (1) şi (2).

... **1p**

□