



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ  
"GRIGORE MOISIL" - EDIȚIA a XXXV-a  
BISTRITĂ, 24-26 MARTIE 2023

## Clasa a XII-a

1. Să se calculeze  $\int_0^{2023} \{\sqrt{x}\} dx$ , unde am notat cu  $\{a\}$  partea fracționară a numărului real  $a$ .
2. Fie  $G$  un grup cu  $n \geq 2$  elemente. Arătați că dacă  $f : G \rightarrow G$  e o funcție cu proprietatea că  $f(xy) = f(x)f(y)$  pentru cel puțin  $n^2 - 1$  perechi  $(x, y) \in G \times G$ , atunci  $f$  este morfism.
3. Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  și  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  funcții continue cu proprietatea că

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d g(x) dx.$$

Să se arate că există cel puțin un punct  $\xi \in (a, b)$  astfel încat

$$(b - a)f(\xi) = (d - c)g\left(\frac{d - c}{b - a}\xi + \frac{bc - ad}{b - a}\right).$$

4. Fie  $(A, +, \cdot)$  un inel cu unitate și cu proprietatea că dacă  $x \in A$  și  $x^2 = 0$ , atunci  $x = 0$ . Dacă  $M = \{a \in A \mid a^3 = a\}$ , să se demonstreze că:
  - (i) dacă  $x, y \in A$  și  $xy = 0$ , atunci și  $yx = 0$ ;
  - (ii) dacă  $a \in M$ , atunci  $a^2 \in Z(A)$ ;
  - (iii)  $2a \in Z(A)$ ,  $\forall a \in M$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timp de lucru: 3 ore.