Clasa a V -a

V 1. Aflaţi numerele naturale p şi q din egalitatea:

$$5^p + 3 = 2(5^q - 5^r).$$

Ovidiu Pop şi Dorel Miheţ

Soluţie

Deoarece $5 + 3 = 2(5 - 1)$, numerele $p = 1, q = 1, r = 0$ verifică egalitatea din enunţ. **1p**

Arătăm că acestea sunt singurele numere care verifică această egalitate.

Observăm că r trebuie să fie 0, pentru că altfel $2(5^q - 5^r)$ s-ar termina în 0, pe când $5^p + 3$ se termină în 8. .... **2p**

Înlocuind pe r cu 0 egalitatea devine $5^p + 3 = 2(5^q - 1)$ adică $5^p + 5 = 2 \cdot 5^q$.

Deoarece $5^p + 5$ nu este multiplu de 25, nu se poate ca $q \geq 2$. Cum nici $q = 0$ nu este bun, în mod necesar $q = 1$ **3p**

Rezultă că $5^p + 5 = 10$, de unde obţinemi $p = 1$. **1p**

Soluţie alternativă

Ca în prima soluţie se arată că $r = 0$, deci $5^p + 3 = 2(5^q - 1)$. **2p**

Dacă numărul q ar fi mai mare sau egal cu 2 atunci ultimele două cifre ale numărului $2(5^q - 1)$ ar fi 48 şi nu ar coincide cu ultimele două cifre ale numărului $5^p + 3$. **3p**

Deducem astfel că numărul q este neapărat 1 şi apoi că şi $p = 1$ **2p**

V 2. Construim un şir de numere în felul următor: primul termen este 8, al doilea este 9, iar începând cu al treilea fiecare termen este ultima cifră a sumei precedenţilor doi (al treilea termen este 7, al patrulea este 6, ş.a m.d.).

a) Aflaţi suma primilor 100 de termeni ai şirului.

b) Care este cel mai mic număr natural n cu proprietatea că suma primilor n termeni ai şirului este mai mare decât 2023?

Folclor

Soluţie

a) Scriem termenii şirului până întâlnim din nou succesiunea $8, 9$, pentru că de acolo ei încep să se repete: $8, 9, 7, 6, 3, 9, 2, 1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, ...$ **1p**

Constatăm astfel că termenii şirului se repetă din 12 în 12.

Grupând primii 100 de termenii câte 12 începând cu primul termen, obţinem 8 grupe întregi şi încă 4 numere (primele 4 din şir).

Suma numerelor dintr-o grupă este $8+9+7+6+3+9+2+1+3+4+7+1 = 60$, deci suma primilor 100 de termeni este $8 \cdot 60 + 30 = 510$.................... **2p**

b) Deoarece $2023 = 60 \cdot 33 + 43$, pentru a obţine o sumă mai mare decât 2023 trebuie să adunăm numerele din primele 33 de grupe şi încă câteva din primele numere din şir, care au suma mai mare decât 43.

Trebuie aşadar să adunăm primele $33 \cdot 12$ numere, la care să adăugăm numerele $8, 9, 7, 6, 3, 9, 2$, deci în total $33 \cdot 12 + 7 = 403$ numere. **4p**

V 3. Pe o listă sunt scrise 80 de numere diferite de câte 4 cifre. Arătaţi că cel puţin unul dintre ele nu este nici pătrat perfect, nici cub perfect.

Maria Miheţ

Soluţie

Aflăm care este numărul de pătrate şi cuburi perfecte de 4 cifre.

Cel mai mare pătrat perfect de 4 cifre este $99^2 = 9801$, iar cel mai mic este $1024 = 32^2$, deci pătratele de 4 cifre sunt în număr de 99-32+1=68......... **2p**

La fel, deoarece cel mai mic cub perfect de 4 cifre este 1000, iar cel mai mare este $21^3 = 9261$, numărul cuburilor perfecte de 4 cifre este 12. .... **2p**

Am obţinut astfel 80 de numere, însă nu toate sunt diferite pentru că de exemplu numărul $2^{12} = 4 \cdot 1024 = 4096$ este şi pătrat perfect şi cub perfect: $2^{12} = (2^6)^2 = (2^4)^3$. Aşadar numărul total de pătrate şi cuburi perfecte de 4 cifre este mai mic de 80 (de fapt, 4098 este singurul pătrat şi cub perfect de 4 cifre, deci numărul de pătrate şi cuburi perfecte de 4 cifre este 79) **2p**

Deoarece lista conţine 80 de numere diferite, cel puţin un număr din listă nu este nici pătrat perfect, nici cub perfect. **1p**

V 4. Notăm cu p produsul cifrelor şi cu s suma cifrelor numărului natural n. Spunem că n este un *număr clu* dacă $p \cdot s = 112$.

a) Câte numere clu au suma cifrelor egală cu 28?

b) Aflaţi cel mai mare număr clu.

c) Aflaţi cel mai mic număr clu.

Dorel Miheţ

Soluţie

a) Un număr clu cu suma cifrelor 28 are produsul cifrelor egal cu 4, deci are sau o cifră egală cu 4 şi 24 cifre de 1, sau două cifre de 2 şi 24 cifre de 1.

În primul caz numerele au 25 de cifre, iar cifra 4 poate ocupa oricare poziţie, deci sunt 25 de astfel de numere. **1p**

În al doilea caz numerele au 26 de cifre. 25 dintre ele au primul 2 pe prima poziţie (al doilea 2 poate fi situat pe oricare dintre următoarele 25 de poziţii), 24 au primul 2 pe a doua poziţie, ş.a.m.d., unul are primul doi pe penultima poziţie. Există aşadar $1 + 2 + ... + 25 = 25 \cdot 13 = 325$ numere clu de acest tip, deci numărul numerelor clu cu suma cifrelor 28 este 350.................... **1p**

b), c) Vom cerceta cât de mari sunt numerele clu în funcţie de s.

Din egalitatea $p \cdot s = 112$ rezultă că s este un divizor al lui 112, deci este unul dintre numerele $1, 2, 4, 8, 16, 7, 14, 28, 56, 112$.

Singurul număr clu cu suma cifrelor 112 are 112 cifre de 1 (pentru că p=1), iar numerele cu $s < 112$ au mai puţin de 112 cifre, deci sunt mai mici. Prin urmare cel mai mare număr clu este $M = \underbrace{11...1}_{112 \text{ de } 1}$.......................... **2p**

Un număr clu cu $s = 56$ are produsul cifrelor 2, deci are o cifră egală cu 2 şi 54 cifre de 1. La fel, dacă $s = 16$ atunci $p = 7$, deci numerele clu cu $s = 16$ au o cifră 7 şi 9 cifre de 1 şi ştim că numerele cu $s = 28$ au 25 sau 26 de cifre. . **1p**

Dacă $s = 14$ atunci $p = 8$, deci numerele au fie o cifră de 8 şi 6 cifre de 1, fie o cifră 2, o cifră 4 şi 8 cifre de 1, fie trei cifre 2 şi 8 cifre de 1. Cel mai mic dintre ele este numărul de 7 cifre 1111118. .... **1p**

Arătăm că un număr clu nu poate avea $s < 14$. Într-adevăr, dacă n este un număr clu cu $s < 14$ şi $s \neq 7$ atunci 7 este o cifră a lui n şi cum $p > 16$, n mai are cel puţin o cifră mai mare decât 1 deci s ar trebui să fie cel puţin 7+2=9, ceea ce nu se poate, iar $s = 7$ implică $p = 16$, ceea ce din nou nu se poate pentru că cifrele cu produsul 16 au suma cel puţin 8.

Aşadar cel mai mic număr clu este $m = 1111118$. **1p**

Soluţie alternativă pentru b) şi c)

b) Pentru a fi cel mai mare, un număr trebuie să aibă cât mai multe cifre. Vom arăta mai întâi că un număr clu nu poate avea mai mult de 112 cifre. Într-adevăr, observăm că un clu nu conţine cifra 0 (pentru că atunci $p \cdot s$ ar fi 0), deci fiecare cifră a sa este cel puţin 1. Aşadar un număr clu cu mai mult de 112 cifre are suma cifrelor mai mare decât 112 şi atunci $p \cdot s > 112$, ceea ce nu se poate. **1p**

Cum numărul 11...1 format din 112 cifre de 1 este un clu (pentru că $p \cdot s = 1 \cdot 112 = 112$), deducem că cel mai mare număr clu este $M = \underbrace{11...1}_{112 \text{ de } 1}$. **1p**

c) Un număr clu mai mic decât M are una sau mai multe cifre diferite de 1. Deoarece $112 = 2^4 \cdot 7$, cifrele diferite de 1 pot fi $2, 4, 7$ sau 8.

Căutăm la început numerele clu care au o singură cifră diferită de 1. Dacă această cifră este a iar numărul cifrelor de 1 este x, atunci $p = a$, $s = a + x$ deci $a(a + x) = 112$. Cel mai mic x se obţine când a este cea mai mare cifră, deci pentru $a = 8$ şi este $112 : 8 - 8 = 6$. Aşadar cel mai mic număr clu cu o singură cifră diferită de 1 este 1111118. .... **1p**

Dacă doar două cifre a, b ale unui număr clu sunt diferite de 1, atunci produsul cifrelor este ab iar suma cifrelor este $a+b+x$, unde x este numărul cifrelor de 1. Niciuna dintre cifrele a, b nu poate fi 7 sau 8 pentru că atunci $a \cdot b \geq 14$ şi $a + b + x > 9$, deci $p \cdot s > 14 \cdot 9 = 126$ şi din acelaşi motiv nu se poate nici ca cele două cifre să fie $4, 4$. Aşadar cele două cifre diferite de 1 pot fi doar 2, 2 sau 2, 4. Cel mai mic x se obţine în ultima situaţie: din $2 \cdot 4 \cdot (6 + x) = 112$ rezultă $x = 14 - 8 = 6$, deci cel mai mic număr clu cu două cifre diferite de 1 este numărul de 8 cifre 11111124. .... **1p**

Pentru că deja $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (2 + 2 + 4) > 112$, dacă un număr clu are trei cifre diferite de 1 acestea sunt 2, 2, 2 (cel mai mic dintre ele este 111111222) şi nu există numere clu cu mai mult de trei cifre diferite de 1.

Aşadar cel mai mic număr clu este $m = 1111118$. **1p**