Clasa a VI -a

VI 1. *Şirul lui Morse-Thue* se construieşte astfel: primul termen este cifra 0 apoi fiecare termen, începând cu al doilea, se obţine adăugând termenului precedent complementul său, după cum urmează: $0, 01, 0110, 01101001$, ş.a.m.d..

a) Care sunt ultimele 8 cifre ale celui de-al 2023-lea termen?

b) Aflaţi care este a 2023-a cifră a celui de-al 12-lea termen.

(Complementul unui termen se obţine înlocuindu-i fiecare cifră 0 cu 1 şi fiecare cifră 1 cu 0)

Soluţie

a) Pentru concizia redactării, vom scrie x_k în loc de al k-lea termen.

Conform regulii de formare a şirului, începând cu al patrulea termen ultimele 8 cifre vor alterna între 01101001 şi 10010110. Deoarece 4 şi 2023 au parităţi diferite, ultimele 8 cifre ale lui x_{2023} sunt 10010110. .... **3p**

b) Termenul x_{12} are $2^{11} = 2048$ cifre, deci cifra de pe locul 2023 este una dintre ultimele 32 de cifre ale sale. Considerăm secvenţa formată din ultimele 32 de cifre ale lui x_{12}. Deoarece $2048 - 2023 = 25$, cifra de pe locul 2023 este a 7-a cifră a secvenţei.

Pentru a afla această cifră putem proceda ca la punctul a): începând cu x_6, ultimele 32 de cifre alternează între cele 32 de cifre ale lui x_6 şi cele 32 de cifre ale complementului lui x_6. Cum 6 şi 12 au aceeaşi paritate, ultimele 32 de cifre ale lui x_{12} coincid cu cele 32 de cifre ale lui x_6. Cifra căutată de noi este aşadar a 7-a cifră a lui x_6.

Însă primele 8 cifre ale oricărui termen x_k cu $k \geq 4$ sunt aceleaşi, deci 7-a cifră a lui x_6 este a 7-a cifră a lui x_4, adică 0. .... **4p**

Soluţie alternativă pentru b)

Vom nota $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$ şi cu a_l a l-a cifră a lui x_{12}.

Folosim metoda mersului invers: deoarece $2023 = 1024 + 999$, $a_{2023} = \overline{a}_{999}$. Apoi $999 = 512+487$ implică a_{487}, etc.(dacă $2^k \leq n < 2^{k+1}$, atunci $a_n = \overline{a}_{n-2^k}$). Astfel obţinem succesiv:

$a_{2023} = \overline{a}_{999} = a_{487} = \overline{a}_{231} = a_{103} = \overline{a}_{37} = a_5 = \overline{a}_1 = 0$ **4p**

VI 2. Două numere impare consecutive, ambele numere prime, se numesc *numere prime gemene* (de exemplu 11 şi 13 sunt numere prime gemene).

a) Fie p şi $p + 2$ două numere prime gemene. Ce rest dă numărul p la împărţirea cu 6?

b) Demonstraţi că dacă p şi $p + 2$ sunt numere prime gemene şi $p > 17$, atunci $p + 1$ are cel puţin 8 divizori naturali.

Olimpiadă Estonia

Soluţie

a) Considerăm perechea de numere prime gemene $(p, p+2)$. Dacă $p = 6k+r$, cu $k, r \in \mathbb{N}, r < 6$, atunci r nu poate fi 0, 2 sau 4, pentru că p ar fi par.

De asemenea r poate fi 3 doar în cazul $p = 3$ (altfel p ar fi un multiplu de 3 mai mare decât 3). Deci pentru perechea $(3, 5)$ restul împărţirii la 6 a lui p este 3. . . . . **1p**

Restul nu poate fi 1, pentru că dacă $p = 6k + 1$ atunci $p + 2 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$, care este prim doar dacă $k = 0$, însă atunci $p = 1$, care nu este prim. Aşadar p poate da la împărţirea la 6 sau restul 3 (în cazul perechii $(3, 5)$) sau restul 5. . . . . **1p**

b) Primele perechi $(p, p+2)$ de numere prime gemene cu $p > 17$ sunt $(29, 31)$ şi $(41, 43)$, iar pentru aceste perechi numărul $p + 1$ are 8 divizori. **1p**

Demonstrăm în continuare că dacă $p > 35$ atunci numărul $p+1$ are cel puţin 8 divizori naturali. Într-adevăr, fiind diferit de 3, p este un număr prim de forma $6k+5$. Rezultă că $p+1$ se divide cu 6, deci are printre divizori numerele $1, 2, 3, 6$. Numerele $p + 1$, $\frac{p+1}{2}$, $\frac{p+1}{3}$, $\frac{p+1}{6}$ sunt şi ele divizori ai lui $p + 1$, iar dacă $\frac{p+1}{6} > 6$ (adică $p > 35$), toţi aceşti divizori sunt mai mari decât 6, deci $p+1$ are cel puţin 8 divizori. **4p**

Soluţie alternativă pentru b)

Folosind formula pentru numărul divizorilor unui număr, demonstrăm că un multiplu de 6 mai mare sau egal cu 30 are cel puţin 8 divizor naturali.

Fie $m \in \mathbb{N}, m \geq 5$. Dacă în descompunerea în factori primi a lui m apare un factor prim q diferit de 2 şi de 3, atunci $6m$ este multiplu de $2 \cdot 3 \cdot q$, deci are cel puţin $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ divizori naturali. În caz contrar $m = 2^r \cdot 3^s$ cu $r \geq 3, s = 0$ sau $r = 0, s \geq 2$ sau $r, s \geq 1$, deci $6m = 2^{r+1} \cdot 3^{s+1}$ cu $(r + 2) \cdot (s + 2) \geq 8$ şi astfel găsim şi în acest caz cel puţin 8 divizori naturali pentru $6m$. **5p**

VI 3. Care este numărul maxim de numere pe care le putem elimina din mulţimea $A = \{1, 2, 3, ..., 15\}$ astfel încât produsul numerelor rămase să se dividă cu fiecare element al mulţimii A?

Concurs IMC

Soluţie

Fie M o submulţime a lui A cu proprietatea că produsul elementelor sale se divide cu fiecare dintre numerele mulţimii A. Deoarece cel mai mic multiplu comun al numerelor $1, 2, ..., 15$ este $m = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, M trebuie să conţină numerele prime 11 şi 13 şi de asemenea un multiplu de 7 (pe 7 sau pe 14). . **2p**

Dacă M ar avea doar patru elemente, atunci cel de-al 4-lea ar trebui să fie multiplu de 2, de 3 şi de 5, deci ar fi mare decât 15, ceea ce nu se poate. Aşadar M are cel puţin 5 elemente. **2p**

Pe de altă parte, dacă eliminăm cele mai mici 10 numere ale mulţimii A atunci produsul celor 5 numerelor rămase este $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15$ şi pentru că $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = m$, el se divide cu fiecare din elementele mulţimii A. **2p**

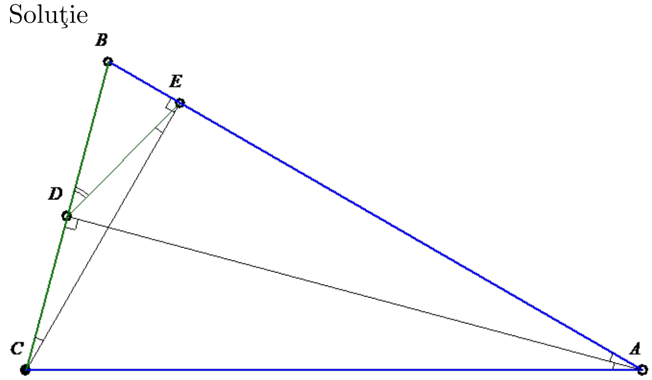
Răspuns: numărul maxim de numere pe care le putem elimina este 10. . **1p**

VI 4. a) Andrei a construit bisectoarea AD şi înălţimea CE ale unui triunghi ascuţitunghic ABC şi a constatat că $\angle ECD = \angle CED = 15°$. A măsurat apoi unghiurile triunghiului. Puteţi deduce ce rezultate a obţinut Andrei?

b) În triunghiul ascuţitunghic ABC se construiesc bisectoarea AD şi înălţimea CE. Demonstraţi că dacă $\angle ECD = \angle CED$, atunci $\angle BAC = \angle EDB$.

Dorel Miheţ

Soluţie



a) În triunghiul dreptunghic BEC unghiul C are $15°$, deci $\angle B = 90° - 15° = 75°$. Observăm de asemenea că $\angle BED = 90° - \angle CED = 90° - 15° = 75°$, deci triunghil BED este isoscel cu $ED = BD$. **1p**

Însă $ED = DC$ (pentru că $\angle ECD = \angle CED$), deci $BD = DC$. **1p**

Cum AD este bisectoare, deducem că triunghiul ABC este isoscel cu baza BC (AD este mediană şi bisectoare sau observăm că $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ conform criteriului de congruenţă LLU, unghiurile care se opun lui AD fiind ambele ascuţite). **1p**

Rezultă că $\angle ACB = \angle ABC = 75°$ şi $\angle BAC = 180° - 150° = 30°$. **1p**

b) Urmăm rezolvarea de la a) cu $\angle ECD = \angle DEC = \alpha$ (în loc de $15°$).

Obţinem asfel $\angle B = 90° - \alpha$ (din triunghiul dreptunghic BEC) şi $\angle BED = 90° - \angle CED = 90° - \alpha$, deci triunghil BED este isoscel cu $ED = BD$. Prin urmare $BD = ED = DC$. **1p**

De aici rezultă că triunghiul ABC este isoscel cu $AB = AC$, AD fiind bisectoare şi mediană. **1p**

Acum putem calcula $\angle A$: $\angle B + \angle C = 2(90° - \alpha) = 180° - 2\alpha$, deci $\angle A = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha$. Cum $\angle EDB$ are tot măsura 2α (este unghi exterior triunghiului EDC), $\angle BAC = \angle EDB$, ceeea ce trebuia demonstrat. **1p**