Clasa a VII -a

VII 1. a) Aflaţi numerele naturale n pentru care $\sqrt{n}+\sqrt{n+2023}$ este un număr raţional.

b) Demonstraţi că nu există niciun număr natural n astfel încât numărul $\sqrt{n}+\sqrt{n+2022}$ să fie raţional.

Ovidiu Pop

Soluţie

a) Se ştie că dacă a, b sunt numere raţionale pozitive şi $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ şi $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$. Aşadar dacă $\sqrt{n}+\sqrt{n+2023}\in\mathbb{Q}$ atunci $\sqrt{n}=r_1\in\mathbb{Q}$ şi $\sqrt{n+2023}=r_2\in\mathbb{Q}$. **1p**

Din $n=r_1^2$ şi $n\in\mathbb{N}$ rezultă $r_1\in\mathbb{N}$, şi la fel $r_2\in\mathbb{N}$. **1p**

Scriind egalitatea $r_2^2-r_1^2=2023$ sub forma $(r_2-r_1)(r_2+r_1)=2023$ deducem că numerele r_2-r_1 şi r_2+r_1 sunt divizori naturali ai lui 2023. .... **1p**

Cum divizorii lui $2023=7\cdot 17^2$ sunt 1, 7, 17, 119, 289 şi 2023, avem doar trei posibilităţi: $r_1-r_2=1, r_1+r_2=2023, r_1-r_2=7, r_1+r_2=289$ sau $r_1-r_2=17, r_1+r_2=119$. **1p**

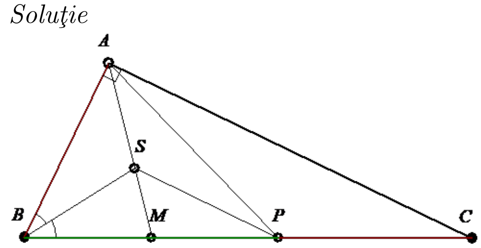
Obţinem astfel trei numere n pentru care $\sqrt{n}+\sqrt{n+2023}\in\mathbb{Q}$: $1012^2, 148^2$ şi 68^2. .... **1p**

b) Raţionând ca la a) deducem că dacă n este un număr natural astfel încât $\sqrt{n}+\sqrt{n+2022}\in\mathbb{Q}$ atunci $2022=(r_1-r_2)(r_1+r_2)$ pentru anumite numere naturale r_1, r_2. Această egalitate este însă imposibilă, deoarece r_1-r_2 şi r_1+r_2 au aceeaşi paritate, deci $(r_1-r_2)(r_1+r_2)$ este multiplu de 4, iar 2022 nu este multiplu de 4. .... **2p**

VII 2. Pe ipotenuza BC a triunghiului dreptunghic ABC se consideră punctul P astfel încât $PC=AB$. Demonstraţi că mediana din A, bisectoarea unghiului B şi înălţimea din P ale triunghiului ABP sunt concurente.

Olimpiadă Iugoslavia

Soluţie



Bisectoarea unghiului B intersectează mediana AM a triunghiului ABP în punctul S.

Ni se cere să arătăm că $PS\perp AB$ sau, echivalent, că $PS\parallel AC$. **2p**

Din teorema bisectoarei în triunghiul ABM rezultă $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{BM}{AB}$. **2p**

Însă $BM=MP$ şi $AB=PC$, deci $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{MP}{PC}$. **1p**

Din reciproca teoremei lui Thales în triunghiul AMC deducem că $PS \parallel AC$ şi astfel problema este rezolvată. **2p**

Soluţie alternativă

Soluţia este asemănătoare: arătăm că punctul de intersecţie dintre mediana din A şi înălţimea din P ale triunghiului ABP se află pe bisectoarea din B.

Fie M mijlocul laturii BP şi S punctul de intersecţie dintre AM şi perpendiculara din P pe AB.

Pentru a demonstra că $[BS$ este bisectoarea unghiului B este suficient să demonstrăm că $\dfrac{MS}{SA} = \dfrac{BM}{AB}$. **2p**

Dreptele PS şi AC sunt paralele, fiind perpendiculare pe AB. Din teorema lui Thales rezultă că $\dfrac{MP}{PC} = \dfrac{MS}{SA}$. **2p**

Cum $MP = BM$ şi $PC = AB$, are loc egalitatea $\dfrac{MS}{SA} = \dfrac{BM}{AB}$. **1p**

Din reciproca teoremei bisectoarei în triunghiul ABM deducem că $[BS$ este bisectoarea unghiului ABM şi astfel am demonstrat că cele trei linii importante ale triunghiului ABP sunt concurente în punctul S **2p**

VII 3. Se dă mulţimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

a) Câte submulţimi ale mulţimii A au cel mai mare element egal cu 5?

b) Pentru fiecare submulţime nevidă M a lui A considerăm numărul x_M care este suma dintre cel mai mare şi cel mai mic element al mulţimii M. Demonstraţi că media aritmetică a acestor numere este egală cu 11.

Soluţie

a) Ştim că o mulţime cu n elemente are 2^n submulţimi. Submulţimile lui A care au pe 5 ca cel mai mare element se obţin dintr-o submuţime arbitrară a mulţimii $\{1, 2, 3, 4\}$, la care se adaugă elementul 5. Numărul lor este aşadar egal cu numărul submulţimilor mulţimii $\{1, 2, 3, 4\}$, adică 2^4................ **2p**

b) Mulţimea M are $2^{10} - 1 = 1023$ submulţimi nevide.

Cu un raţionament similar celui de la a) deducem că un număr $k \in A$ este cel mai mare în 2^{k-1} dintre aceste submuţimi, deci suma celor mai mari elemente este $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + ... + 10 \cdot 2^9$.

La fel, numărul 1 este cel mai mic în 2^9 submulţimi (numărul submulţimilor mulţimii $\{2, 3, ..., 10\}$) şi în general $k \in A$ este cel mai mic în 2^{10-k} submulţimi, deci suma elementelor minime este $1 \cdot 2^9 + 2 \cdot 2^8 + ... + 10 \cdot 2^0$. **3p**

Suma celor 1023 numere x_M este aşadar

$$(1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + ... + 9 \cdot 2^8 + 10 \cdot 2^9) + (1 \cdot 2^9 + 2 \cdot 2^8 + ... + 9 \cdot 2^1 + 10 \cdot 2^0) =$$

$$(1+10) \cdot 2^0 + (2+9) \cdot 2^1 + ... + (10+1) \cdot 2^9 = 11(2^0 + 2^1 + ... + 2^9) = 11 \cdot (2^{10} - 1),$$

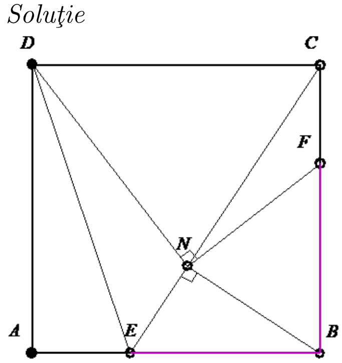
iar media lor aritmetică este $\dfrac{11 \cdot (2^{10} - 1)}{2^{10} - 1} = 11$. **2p**

Observaţie. Dacă A este mulţimea primelor n numere naturale nenule, atunci media aritmetică a numerelor x_M este $n + 1$.

VII 4. Pe laturile AB şi BC ale pătratului $ABCD$ se consideră punctele E şi F astfel încât $BE = BF$. Notăm cu N piciorul perpendicularei din B pe CE. Demonstraţi că $DN \perp NF$.

Revista Tangenta

Soluţie



Observăm că $\angle DCN = \angle NEB = \angle NBF$.

Dacă concluzia este adevărată atunci $\angle BNF = \angle CND$ (au acelaşi complement, $\angle CNF$), deci triunghiurile CND şi BNF sunt asemenea. Reciproc, dacă $\triangle CND \sim \triangle BNF$, atunci $\angle CND = \angle BNF$ şi atunci $\angle DNF = \angle CNB = 90°$. Va fi deci suficient să demonstrăm că $\triangle CND \sim \triangle BNF$. **2p**

Pentru a demonstra asemănarea acestor triunghiuri folosim crieriul de asemănare LUL. Deoarece unghiurile DCN şi NBF sunt egale, rămâne să arătăm că $\dfrac{CN}{BC} = \dfrac{BN}{BE}$ sau că (ţinând seama de egalităţile $BC = CD$ şi $BE = BF$)

$$\frac{CN}{BC} = \frac{BN}{BE}.$$

Această proporţionalitate rezultă însă din asemănarea $\triangle BNE \sim \triangle CNB$, şi astfel problema este rezolvată. **5p**