Clasa a VIII -a

VIII 1. Aflaţi cea mai mică valoare a expresiei $E(x, y, z) = x + 2y + 3z$ atunci când numerele întregi x, y, z verifică relaţia:

$$2x(3x - 1) + y(y - 4x) + 4z(z - x) = 1.$$

Dorel I. Duca

Soluţie

Egalitatea din enunţ poate fi scrisă sub forma:

$$(x - 1)^2 + (2x - y)^2 + (x - 2z)^2 = 2.$$

.... **2p**

Deoarece x, y, z întregi, două dintre pătrate sunt 1, iar celălalt 0. ...... **1p**

Dacă $(x - 1)^2 = 0$ atunci $x = 1$ şi $(y - 2)^2 = (2z - 1)^2 = 1$, deci $y \in \{1, 3\}$ şi $z \in \{0, 1\}$... **1p**

Dacă $(x - 1)^2 = 1$, atunci $x \in \{0, 2\}$. $x = 0$ implică $y^2 + 4z^2 = 1$, deci $z = 0, y = \pm 1$, iar $x = 2$ implică $(4 - y)^2 + 4(1 - z)^2 = 1$, deci $z = 1$ şi $(y - 4)^2 = 1$. Aşadar

$$(x, y, z) \in \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 3, 0), (1, 3, 1), (0, 1, 0), (0, -1., 0), (2, 5, 1), (2, 3, 1)\}.$$

.... **2p**

De aici deducem că cea mai mică valoare a expresiei $E(x, y, z)$ este -2 şi se atinge pentru $(x, y, z) = (0, -1, 0)$... **1p**

VIII 2. a) Fie $a, b, \alpha, \beta \in (0, \infty)$. Demonstraţi că

$$(\alpha a + \beta b)(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}) \geq (\alpha + \beta)^2.$$

b) Demonstraţi că pentru orice numere negative x, y, z are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{x + 2y} + \frac{1}{y + 2z} + \frac{1}{z + 2x} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}\right).$$

Camelia Maria Chindriş

Soluţie

$$a)\ (\alpha a + \beta b)(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}) = \alpha^2 + \alpha\beta(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}) + \beta^2 \geq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2.$$

.... **2p**

b) Fie $x=-a, y=-b, z=-c$, cu $a,b,c>0$. Inegalitatea de demonstrat devine

$$-\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right)\geq -\frac{1}{3}\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)$$

sau, prin înmulţire cu -1:

$$\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\leq \frac{1}{3}\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right).$$

.... **1p**

Deoarece numerel a,b,c sunt pozitive,

$$\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\leq \frac{1}{3}\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\leq \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}\Leftrightarrow$$

$$abc\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right)\leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

.... **1p**

Ne propunem să demonstrăm această din urmă inegalitate.

Din inegalitatea de la a) rezultă că $\dfrac{1}{a+2b}\leq\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}\right)$, deci

$$\frac{abc}{a+2b}\leq\frac{1}{9}(bc+2ac).$$

.... **1p**

Scriind si celelalte două inegalităţi analoage şi apoi adunând, obţinem

$$abc\left(\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\right)\leq \frac{ab+bc+ca}{3}.$$

Inegalitatea pe care ne-am propus s-o demonstrăm rezultă acum folosind inegalitatea cunoscută $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$. **2p**

Observaţie. Deoarece coeficienţii lui a şi b din $a+2b$ sunt numere naturale, inegalitatea $(a+2b)\cdot\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}\right)\geq 9$ poate fi demonstrată folosind inegalitatea dintre media aritmetică şi media armonică astfel:

$$\frac{a+2b}{3}=\frac{a+b+b}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}}=\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{2}{b}}.$$

VIII 3. Piramida patrulateră $VABCD$ are proprietatea că planele (VAB) şi (VCD) sunt perpendiculare pe planul (ABC).

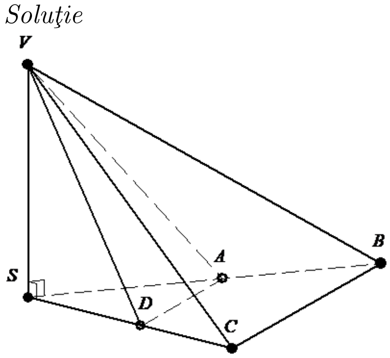
a) Demonstraţi că dreptele AB şi DC sunt concurente.

b) Fie S punctul de intersecţie a dreptelor AB şi DC. Demonstraţi că $VS \perp (ABC)$.

c) Descrieţi modalitatea prin care se obţine o piramidă patrulateră cu două feţe opuse perpendiculare pe planul bazei.

Maria Miheţ şi Dorel Miheţ

Soluţie



Folosim o teoremă de perpendicularitate cunoscută: dacă două plane concurente sunt perpendiculare pe un al al treilea plan, atunci dreapta lor de intersecţie este perpendiculară pe acel plan. **1p**

a) Fiind coplanare, dreptele AB şi CD sunt concurente sau paralele. .. **1p**

Dacă $AB \parallel CD$ atunci dreapta de intersecţie a planelor (VAB) şi (VCD) este paralelă cu planul (ABC) (teorema acoperişului), deci nu este perpendiculară pe planul (ABC), în contradicţie cu teorema enunţată. Aşadar AB şi CD sunt concurente. **2p**

b) Observăm că dreapta VS este dreapta comună a planelor (VAB) şi (VCD), deci $VS \perp (ABC)$. **2p**

c) Din subpunctul b) rezultă că o piramidă patrulateră cu două feţe opuse perpendiculare pe planul bazei se obţine detaşând dintr-o piramidă triunghiulară cu o muchie laterală perpendiculară pe planul bazei o piramidă triunghiulară care are una dintre muchii muchia perpendiculară pe bază (vezi figura). ... **1p**

VIII 4. O mulţime M de 31 de numere naturale conţine numărul 226, iar cel mai mare element al său este 2023. Se mai ştie că suma oricăror 16 elemente ale mulţimii este mai mare decât suma celorlalte elemente rămase.

Aflaţi celelalte elemente ale mulţimii M.

Vasile Şerdean

Soluţie

Fie $x_1 < x_2 < ... < x_{31} = 2023$ cele 31 de elemente ale mulţimii.

Din ipoteză $x_1 + x_2 + ... + x_{16} > x_{17} + x_{18} + ... + x_{31}$, deci

$$x_1 > (x_{31} - x_{16}) + (x_{30} - x_{15}) + ... + (x_{17} - x_2).$$

. . . . **1p**

Fiecare paranteză din membrul drept reprezintă un număr natural mai mare sau egal cu 15, deci $x_1 > 15^2 = 225$ şi cum $226 \in M$, deducem că $x_1 = 226$. **2p**

Rezultă că

$$226 > (x_{31} - x_{16}) + (x_{30} - x_{15}) + ... + (x_{17} - x_2) \geq 225$$

deci $(x_{31} - x_{16}) + (x_{30} - x_{15}) + ... + (x_{17} - x_2) = 225$, ceea ce implică

$$x_{31} - x_{16} = x_{30} - x_{15} = ... = x_{17} - x_2 = 15.$$

. . . . **2p**

Prin urmare $x_{16} = 2023 - 15 = 2008$.

Numărul x_{17} este cel puţin 2009 şi nu se poate ca $x_{17} > 2009$ pentru că atunci $x_{31} > 2009 + 14 = 2023$. Deci $x_{17} = 2009$.

La fel deducem că $x_{18} = 2010, ..., x_{30} = 2022$ şi apoi $x_2 = x_{17} - 15 = 1994$, $x_3 = 1995, ..., x_{15} = 2007$. **2p**