CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
"GRIGORE MOISIL" - EDIȚIA a XXXV-a
BISTRIȚA, 24-26 MARTIE 2023

Barem - Clasa a IX-a

1. *Să se arate că dacă ecuaţia de gradul doi $x^2 + ax + b = 0$ are rădăcinile întregi de modul mai mare decat 2, atunci*

$$n = (a + 1)^2 + (b + 1)^2 + 2ab - 1$$

este pătratul unui număr compus.

Dorel I. Duca

Barem. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei.

$x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = b$ . . . **1p**

$n = (a + b + 1)^2$ . . . **2p**

$n = (x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1)^2 = [(x_1 - 1)(x_2 - 1)]^2$ . . . **2p**

$|x_1| > 2$ şi $|x_2| > 2$ rezultă că $(x_1 - 1)(x_2 - 1)$ este număr compus. concluzia . . . **2p**

□

2. *Fie $\triangle ABC$ şi M mijlocul laturii BC. Notăm cu G, D şi F centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, ABG şi respectiv AMC. De asemenea, notăm cu E centrul cercului înscris triunghiului CMG. Arătaţi că triunghiul CMG este echilateral dacă şi numai dacă $DFCE$ este paralelogram.*

Adrian Bud

Barem. Notăm $CM = x$, $GC = y$, $GM = z$. Atunci

$$\overrightarrow{CE} = \frac{x}{3(x+y+z)} \cdot \overrightarrow{CA} + \frac{2x+3y}{6(x+y+z)} \cdot \overrightarrow{CB}$$

. . . **2p**

$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}) + \frac{1}{9}(4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{9}\overrightarrow{CA} + \frac{5}{18}\overrightarrow{CB}$ . . . **1p**

$CEDF$ paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FD} \Leftrightarrow$ ... **1p**

$\frac{x}{3(x+y+z)} = \frac{1}{9}$ şi $\frac{2x+3y}{6(x+y+z)} = \frac{5}{18} \Leftrightarrow$ ... **1p**

$2x = y + z$ şi $5z = x + 4y \Leftrightarrow$ ... **1p**

$x = y = z \Leftrightarrow$ triunghiul CMG este echilateral. ... **1p**

□

3. *Fie $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ vectori în plan astfel încât $|\vec{v_1}| = |\vec{v_2}| = |\vec{v_3}| = |\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3}|$. Să se arate că există $i, j \in \{1, 2, 3\}$ astfel ca $\vec{v_i} + \vec{v_j} = \vec{0}$.*

Dan-Ştefan Marinescu

Barem. Fie $r = |\overrightarrow{v_1}|$. Dacă $r = 0$ nu avem ce demonstra. Dacă $r > 0$, fără a restrânge generalitatea, putem admite $r = 1$. ... **1p**

$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ nu pot fi toţi egali ... **1p**

Dacă doi sunt egali, fie aceştia $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$. Din egalitatea paralelogramului, avem $|2\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}|^2 + |2\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_3}|^2 = 2(2|\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_3}|^2)$, de unde aflăm

$$|2\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_3}| = 3$$

... **1p**

Din cazul de egalitate al inegalităţii triunghiului pentru $|\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3}| \geq 3$, deducem că $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3} = 0$

... **1p**

Dacă vectorii sunt distincţi, considerăm pe cercul $C(O, 1)$ punctele A_1, A_2, A_3 astfel ca $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{v_2}$ şi $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{v_3}$.

... **1p**

Atunci, dacă H este ortocentrul triunghiului $A_1A_2A_3$, avem $\overrightarrow{OH} = 1$, deci triunghiul $A_1A_2A_3$ este dreptunghic ... **1p**

finalizare ... **1p**

□

4. *Fie m un număr natural. Să se determine cel mai mare număr real a astfel încat inegalitatea*

$$a + (x+y)^{2n} \leq 2^{2n-1}(1 + x^{2n})(1 + y^{2n})$$

are loc pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ şi orice număr natural $n \geq m$.

Dorin Andrica

Barem. Luăm $n = m$ şi $x = y = 0$, atunci $a \leq 2^{2m-1}$ ... **1p**

Dacă $a = 2^{2m-1}$ inegalitatea este echivalentă cu

$$2^{2m-1} + (x+y)^{2n} \leq 2^{2n-1}(1 + x^{2n} + y^{2n} + (xy)^{2n}),\ x, y \in \mathbb{R}$$

... **1p**

adică

$$\frac{1}{2^{2n-2m}} \leq 1 + (xy)^{2n} + 2\left[\frac{x^{2n} + y^{2n}}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^{2n}\right],\ x, y \in \mathbb{R}$$

... **2p**

Din $(xy)^{2n} \geq 0$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$ şi ... **1p**

$$\frac{x^{2m} + y^{2m}}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^{2n},\ x, y \in \mathbb{R},\ 1 \geq \frac{1}{2^{2n-2m}}$$

... **1p**

obţinem concluzia $a = 2^{2m-1}$. ... **1p**

$\square$