CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
"GRIGORE MOISIL" - EDIȚIA a XXXV-a
BISTRIȚA, 24-26 MARTIE 2023

Clasa a IX-a

1. Să se arate că dacă ecuaţia de gradul doi $x^2+ax+b=0$ are rădăcinile întregi de modul mai mare decât 2, atunci
$$n=(a+1)^2+(b+1)^2+2ab-1$$
este pătratul unui număr compus.

2. Fie $\triangle ABC$ şi M mijlocul laturii BC. Notăm cu G, D şi F centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, ABG şi respectiv AMC. De asemenea, notăm cu E centrul cercului înscris triunghiului CMG. Arătaţi că triunghiul CMG este echilateral dacă şi numai dacă $DFCE$ este paralelogram.

3. Fie $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ vectori în plan astfel încât $|\vec{v_1}|=|\vec{v_2}|=|\vec{v_3}|=|\vec{v_1}+\vec{v_2}+\vec{v_3}|$. Să se arate că există $i,j\in\{1,2,3\}$ astfel ca $\vec{v_i}+\vec{v_j}=\vec{0}$.

4. Fie m un număr natural fixat. Să se determine cel mai mare număr real a astfel încat inegalitatea
$$a+(x+y)^{2n}\leq 2^{2n-1}(1+x^{2n})(1+y^{2n})$$
are loc pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$ şi orice număr natural $n\geq m$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă este notată cu 7 puncte. Timp de lucru: *3 ore.*